# 探究 Taylor 公式视角下的偏移问题

华南师范大学数学科学学院 (510631) 陈禧杰

**摘要** 自从在 2016 年全国卷 I 的理科第 21 题中出现了一道“极值点偏移”的题目后, 全国各地都开始对此类型的题目进行研究, 方法层出不穷, 比较常见的方法有构造函数法、比值代换、差值代换、对数均值不等式法等, 更有延伸的题型——“拐点偏移”, 本文透过高等数学中的 Taylor 公式对该两类型的偏移问题进行剖析, 得到两条证明偏移问题的判定定理.

**关键词** Taylor 公式; 极值点偏移; 拐点偏移

## 一、极值点偏移和拐点偏移

极值点的定义大家是比较熟悉的, 即若 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大 (小) 值, 则 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极大 (小) 值点, 但拐点的定义可能不甚了解.

**定义 1**[1] 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续. 若曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 左右两侧的上下凹凸性相反, 则称 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

结合函数凹凸性的等价定义[1], 可得:

性质 1[1]: 若 $f(x)$ 二阶可导, 有 $f''(x_0)=0$ 且在 $x_0$ 两侧的二阶导数异号, 则 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

**1. 极值点偏移**

**定义 2**[2] 已知函数 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续, 且在区间 $(a,b)$ 内只有一个极值点 $x_0$. 对任意满足 $f(x_1)=f(x_2)=m$ ($m$ 为常数), 且 $a<x_1<x_0<x_2<b$ 的 $x_1,x_2$, 若都有 $x_1+x_2>2x_0$, 则称函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上极值点 $x_0$ 左偏; 若都有 $x_1+x_2<2x_0$, 则称函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上极值点 $x_0$ 右偏.

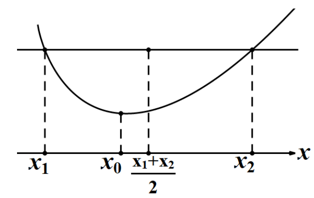


图 1

极值点 $x_0$ 左偏的图示可参看图 1.

**2. 拐点偏移**

在极值点偏移的基础上, 各地模拟题中又出现了拐点偏移, 此类题型一般以某些函数在拐点两侧“凹凸程度”不同, 导致函数图像关于拐点不具有中心对称性作为命题背景. 下面给出拐点偏移的定义.

---

**例 3** (2016 年高联福建预赛) 已知 $x,y,z>0$, 求 $\dfrac{4xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

**分析** 在结论中令 $k_1=k_2=k_3=1,m_2=4,m_3=1$, 则 $S_{\max}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

**例 4** (2015 年《数学教学》947 问题) 已知 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $xy+2xz$ 的最大值.

**分析** 由于求最大值, 因而考虑正数情况. 在推论中令 $k_1=k_2=k_3=1,m_2=1,m_3=2$, 则 $S_{\max}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

**例 5** (2012 年高联甘肃预赛) 已知 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $xy+yz$ 的最大值.

**分析** 由于求最大值, 因而只考虑正数情况. 在推论中令 $k_1=k_2=k_3=m_2=m_3=1$, 则 $S_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**例 6** (2009 年高联浙江预赛) 已知 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $\sqrt{2}xy+yz$ 的最大值.

**分析** 由于求最大值, 因而只考虑正数情况. 在推论中令 $k_1=k_2=k_3=1,m_2=\sqrt{2},m_3=1$, 则 $S_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

最后, 给出其 $n$ 元推广形式, 有兴趣的读者可自行证明.

**变式** ($n$ 元形式) 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}^+$, 常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,m_2,m_3,\cdots,m_n\in\mathbb{R}^+$, 其中 $n\geqslant 3,n\in\mathbb{N}$, 求 $S_n=\dfrac{x_1\sum\limits_{i=2}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i^2}$ 的最大值.

**结论** $(S_n)_{\max}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{n}(\prod\limits_{j\neq 1,i}^{n}k_jm_i^2)\Big/\prod\limits_{i=1}^{n}k_i}$.

**注** 若 $n=2$ 时, $(S_2)_{\max}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m_2^2}{k_1k_2}}$, 其结果与上式亦吻合.

**参考文献**

[1] 中国数学会普及工作委员会及数学奥林匹克委员会. 2017 年高中数学联赛备考手册 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2017.

[2] 中国数学会普及工作委员会及数学奥林匹克委员会. 2013 年高中数学联赛备考手册 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2013.

**定义** 3[2] 已知函数 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续, 且在区间 $(a,b)$ 内只有一个拐点 $x_0$. 对任意满足 $f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)$, 且 $a<x_1<x_0<x_2<b$ 的 $x_1,x_2$, 若都有 $x_1+x_2>2x_0$, 则称函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上拐点 $x_0$ 左偏; 若都有 $x_1+x_2<2x_0$, 则称函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上拐点 $x_0$ 右偏.

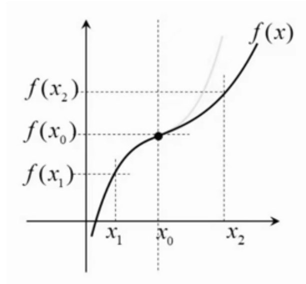

图 2

拐点偏移的题目一般是针对 $f(x)$ 是 $(a,b)$ 上的单调函数而言的, 以拐点左偏为例, 见图 2.

特别地, $a$ 可为 $-\infty$, $b$ 可为 $+\infty$.

## 二、Taylor 公式

高中阶段经常会遇到含有 $e^x$ 和 $\ln x$ 的超越函数, 若能用简单的多项式函数来近似替代此类函数, 而且误差又能满足要求, 那么对函数值的近似计算具有重要意义, 且在导数大题中可用于放缩来简化不等式证明, 而在高等数学中的 Taylor 公式便能达到这个效果.

**定义** 4[1] 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数, 则对任意的 $x\in U^{\circ}(x_0)$, 存在 $\xi$ 介于 $x$ 和 $x_0$ 之间, 使 $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$, 其中 $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的 $n$ 阶 Taylor 多项式, $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 Taylor 公式的 Lagrange 型余项, 其中 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)(0<\theta<1)$. (补充: 某邻域 $U(x_0)$ 的含义是指以 $x_0$ 为中心, 以某一常数 $r(r>0)$ 作为半径的一个开区间 $(x_0-r,x_0+r)$, $U^{\circ}(x_0)=U(x_0)/\{x_0\}$)

中学阶段可以直观地理解为当 $n$ 越大时, $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 与函数 $f(x)$ 的图像就越相似.

## 三、Taylor 公式与偏移问题的联系

事实上, 极值点偏移与函数的轴对称性有关, 而拐点偏移则与函数的中心对称性有关, 可以分别对应中学阶段熟悉的二次函数与三次函数. 已知二次函数具有轴对称性, 其极值点恰为其对称轴, 而三次函数具有中心对称性, 其对称中心恰为其拐点. 所以在偏移问题上, 按照定义 2 和定义 3 的背景, 二次函数不发生极值点偏移, 即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0$($x_0$ 为极值点); 三次函数不发生拐点偏移, 即 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f(x_0)$ 时有 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0$($x_0$ 为拐点). 然而, 当 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的二阶 Taylor 多项式 $T_2(x)$ 和三阶 Taylor 多项式 $T_3(x)$ 恰好分别为二次函数和三次函数, 而且 Taylor 多项式可以用于逼近原函数, 所以可以尝试通过分别对 $f(x)$ 与 $T_2(x)$ 和 $f(x)$ 与 $T_3(x)$ 的差异进行分析, 将 Taylor 公式与偏移问题联系起来, 下面来看看如何应用作差法分析其差异.

**定理** 1[3] 连续函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有二阶导数且只有一个极值点 $x_0$, $f'(x)$ 在 $(a,x_0)$ 和 $(x_0,b)$ 上异号, $T_2(x)=f(x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$ 为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的二阶 Taylor 多项式, 记差函数为 $D_2(x)=f(x)-T_2(x)$, 对任意满足 $f(x_1)=f(x_2)=m$($m$ 为常数), 且 $a<x_1<x_0<x_2<b$ 的 $x_1,x_2$:

(1) 若 $D_2(x)f'(x)<0,\forall x\neq x_0$, 则 $x_1+x_2>2x_0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上极值点 $x_0$ 左偏;

(2) 若 $D_2(x)f'(x)>0,\forall x\neq x_0$, 则 $x_1+x_2<2x_0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上极值点 $x_0$ 右偏.

**证明**[3] 不妨设极值点 $x_0$ 为极小值点, 类似可证为极大值点的情况. 因为二次函数 $T_2(x)=f(x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$ 是以 $(x_0,f(x_0))$ 为顶点, 以 $x=x_0$ 为对称轴, 所以 $m>f(x_0)$ 时, $T_2(x)$ 也必定存在两个不等实根 $x_1',x_2'$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=m=T_2(x_1')=T_2(x_2')$, 且由二次函数的轴对称性可得 $x_1'+x_2'=2x_0$, 故不妨设 $a<x_1'<x_0<x_2'<b$.

(1) 若 $D_2(x)f'(x)<0$, $\forall x\neq x_0$, 如图 3, 因为 $x=x_0$ 为极小值点, 故 $x\in(a,x_0)$, $f'(x)<0$, 所以 $D_2(x)=f(x)-T_2(x)>0$, 即 $f(x)>T_2(x)$. 所以 $f(x_1')>T_2(x_1')=f(x_1)$, 又因为 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 所以可推出 $x_1'<x_1$. 同理可证当 $x>x_0$ 时, 有 $x_2'<x_1$. 故由 $x_1'<x_1$ 和 $x_2'<x_2$ 可推出 $x_1+x_2>x_1'+x_2'=2x_0$.

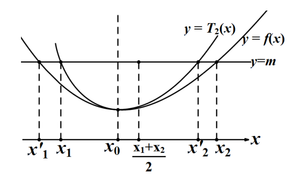

图 3

(2) 若 $D_2(x)f'(x)>0,\forall x\neq x_0$, 同理可证得 $x_1+x_2<x_1'+x_2'=2x_0$.

**定理** 2 连续的函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有三阶导数且只有一个拐点 $x_0$, $f''(x)$ 在 $(a,x_0)$ 和 $(x_0,b)$ 上异号, $T_3(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$ 为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的三阶 Taylor 多项式, 记差函数为 $D_3(x)=f(x)-T_3(x)$, 对任意满足 $f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)$, 且 $a<x_1<x_0<x_2<b$ 的 $x_1,x_2$:

(1) 若 $f(x)$ 单调递增, 当 $x\in(a,x_0)$ 时, $f''(x)<0(>0)$ 且 $D_3'(x)<0$, 当 $x\in(x_0,b)$ 时, $f''(x)>0(<0)$ 且 $D_3'(x)>0$, 则 $x_1+x_2<2x_0$, 即拐点右偏;

(2) 若 $f(x)$ 单调递增, 当 $x\in(a,x_0)$ 时, $f''(x)<0(>0)$

且 $D_3'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, b)$ 时, $f''(x) > 0(< 0)$ 且 $D_3'(x) < 0$, 则 $x_1 + x_2 > 2x_0$, 即拐点左偏;

(3) 若 $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (a, x_0)$ 时, $f''(x) < 0(> 0)$ 且 $D_3'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, b)$ 时, $f''(x) > 0(< 0)$ 且 $D_3'(x) < 0$, 则 $x_1 + x_2 < 2x_0$, 即拐点右偏;

(4) 若 $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (a, x_0)$ 时, $f''(x) < 0(> 0)$ 且 $D_3'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, b)$ 时, $f''(x) > 0(< 0)$ 且 $D_3'(x) > 0$, 则 $x_1 + x_2 > 2x_0$, 即拐点左偏.

**证明** 不妨证"若 $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (a, x_0)$ 时, $f''(x) < 0$ 且 $D_3'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, b)$ 时, $f''(x) > 0$ 且 $D_3'(x) > 0$, 则 $x_1 + x_2 < 2x_0$", 其他情况类似可证.

$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$ 为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的三阶 Taylor 多项式, 而 $T_3'(x) = f'(x_0) + \dfrac{f'''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ 恰好等于 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处的二阶 Taylor 多项式, 而 $f'(x)$ 代替 $f(x)$ 后的 $D_2(x)$ 恰为 $D_3'(x) = f'(x) - T_3'(x)$. 所以当 $x \in (a, x_0)$ 时, $f''(x) < 0$ 且 $D_3'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, b)$ 时, $f''(x) > 0$ 且 $D_3'(x) > 0$, 可推得 $D_3'(x)f''(x) > 0, \forall x \neq x_0$, 由定理 1 可得 $f'(x)$ 在 $(a, b)$ 上极值点 $x_0$ 右偏.

令 $g(x) = f(x) + f(2x_0 - x)$, 则 $g'(x) = f'(x) - f'(2x_0 - x)$. 因为 $f'(x)$ 在 $(a, b)$ 上极值点 $x_0$ 右偏, 所以对任意满足 $f'(x_1) = f'(x_2)$, 且 $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ 的 $x_1, x_2$, 若都有 $x_1 + x_2 < 2x_0$, 则 $2x_0 - x_1 > x_2 > x_0$. 因为当 $x \in (x_0, b)$ 时, $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调递增, 得 $f'(2x_0 - x_1) > f'(x_2) = f'(x_1)$, 所以 $f'(x_1) - f'(2x_0 - x_1) < 0$, 所以当 $x \in (x_0, b)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(a, x_0)$ 上单调递减. 同理可得, $g(x)$ 在 $(x_0, b)$ 上单调递增. 于是当 $x \in (a, b)$ 且 $x \neq x_0$ 时, $g(x) > g(x_0)$, 即 $f(x) + f(2x_0 - x) > 2f(x_0)$. 所以 $f(2x_0 - x_1) > 2f(x_0) - f(x_1) = f(x_2)$. 又因为 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 单调递增, 所以 $2x_0 - x_1 > x_2$, 即 $x_1 + x_2 < 2x_0$.

## 四、实战演练

经过上面的分析, 我们从这两个定理中得到了两个用于证明偏移问题的判定定理, 下面来尝试应用到具体的例题当中.

**例 1** (2016 年高考全国卷 I 理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = (x - 2)e^x + a(x - 1)^2$ 有两个零点. (1) 求 $a$ 的取值范围; (2) 设 $x_1, x_2$ 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 < 2$.

**解析** (1) $f'(x) = (x - 1)(e^x + 2a)$, 分类讨论后得 $a \in (0, +\infty)$, 过程略.

(2) 经分析得在 $\mathbb{R}$ 上只存在一个极小值点 $x_0 = 1$ 且 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 故不妨设 $x_1 < 1 < x_2$. $f''(x) = xe^x + 2a$ 得 $T_2(x) = f(x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = (\dfrac{1}{2}e + a)(x - 1)^2 - e$. $D_2(x) = f(x) - T_2(x) = -\dfrac{1}{2}e(x - 1)^2 + (x - 2)e^x + e$. $D_2'(x) = (x - 1)(e^x - e)$, 易证在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上 $(e^x - e)$ 与 $(x - 1)$ 同号, 所以 $D_2'(x) \geqslant 0$(当 $x = 1$ 时取等号), 所以 $D_2(x)$ 是单调递增的, 故在 $(-\infty, 1)$ 上 $D_2(x) < D_2(1) = 0$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $D_2(x) > D_2(1) = 0$. 同时, 因为 $a > 0, e^x > 0$, 所以 $f'(x) = (x - 1)(e^x + 2a)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上 $f'(x) < 0$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$. 综上, $D_2(x)f'(x) > 0 (\forall x \neq 1)$, 所以由定理 1 得 $x_1 + x_2 < 2x_0 = 2$.

**例 2** ([4] 中例 2) 设函数 $f(x) = x\ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$. (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间; (2) 证明: 当 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) + f(x_2) = 0$ 时, $x_1 + x_2 > 2$.

**解析** (1) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 过程略.

(2) 令 $f''(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = 0$, 结合性质 1 可分析得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只存在一个拐点 $x_0 = 1$, 又 $f(x_1) + f(x_2) = 0 = 2f(1)$, 故不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$. $T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 = \dfrac{-(x - 1)^3}{6}$, 所以 $D_3'(x) = (f(x) - T_3(x))' = \ln x + 1 - x + \dfrac{(x - 1)^2}{2}$, $D_3''(x) = \dfrac{1}{x} - 1 + (x - 1)$, $D_3'''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 1$. 因为 $D_3^{(4)}(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$, 所以 $D_3'''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $D_3'''(1) = 0$, 易得 $D_3''(x) \geqslant D_3''(1) = 0$, 所以 $D_3'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $D_3'(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f''(x) = \dfrac{1}{x} - 1 > 0$ 且 $D_3'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f''(x) < 0$ 且 $D_3'(x) > 0$, 所以由定理 2 可得 $x_1 + x_2 > 2x_0 = 2$.

## 五、总结

本文通过结合 Taylor 公式和二次函数的轴对称性和三次函数的中心对称性找到解决"极值点偏移"和"拐点偏移"问题的两条判定定理, 将两类偏移问题通过 Taylor 公式统一起来. 所以在平时的学习中, 若能对这类有明显特征的题目进行问题本源的探究, 得出一般化的解题策略, 便能做到"四两拨千斤", 避免题海战术, 提升思维的广阔性.

### 参考文献


[1] 刘名生, 冯伟贞, 韩彦昌. 数学分析 (一) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[2] 邓启龙. 函数拐点偏移问题的探究 [J]. 中学数学研究 (华南师范大学版), 2021(5 上): 37-38.

[3] 张保成, 伍俊杰. 泰勒公式在极值点偏移问题中的应用 [J]. 中学数学, 2017(21): 80-81.

[4] 田富德, 陈小燕. 以拐点偏移为背景的函数导数试题命制——兼谈试题处理策略 [J]. 中学数学研究, 2016(02): 10-13.